

# МАТЕРИАЛЫ ДЕМПФИРУЮЩИЕ

## Графическое представление комплексных модулей упругости

Издание официальное

БЗ 11—99/460

ГОССТАНДАРТ РОССИИ  
Москва

## Предисловие

1 РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Техническим комитетом по стандартизации ТК 183 «Вибрация и удар»

2 ПРИНЯТ И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Госстандарта России от 22 декабря 1999 г. № 658-ст

3 Настоящий стандарт представляет собой аутентичный текст ИСО 10112—91 «Материалы демпфирующие. Графическое представление комплексных модулей упругости»

4 ВВЕДЕН ВПЕРВЫЕ

© ИПК Издательство стандартов, 2000

Настоящий стандарт не может быть полностью или частично воспроизведен, тиражирован и распространен в качестве официального издания без разрешения Госстандарта России

## Содержание

1 Область применения . . . . .	1
2 Определения и обозначения . . . . .	1
3 Контроль данных . . . . .	1
4 Функция температурного смещения . . . . .	2
5 Представление данных . . . . .	3
Приложение А Соотношения для комплексного модуля упругости . . . . .	7
Приложение В Библиография . . . . .	8

Демпфирование — одно из средств ослабления вибрации в конструкции. Демпфирование представляет собой рассеяние вибрационной энергии и превращение ее в тепловую энергию в процессе распространения колебаний. Если технически значимое демпфирование имеет место внутри материала конструкции, такой материал называют вибродемпфирующим. Рассеяние в вибродемпфирующем материале обусловлено межмолекулярным взаимодействием или взаимодействием узлов кристаллической решетки и может быть охарактеризовано петлей гистерезиса механического напряжения (деформации) в материале. Другие возможные причины демпфирования, такие как пластические деформации, относительные проскальзывания или воздушные зазоры в соединениях, акустическое излучение колебательной энергии, рассеяние энергии вследствие токов Фуко, настоящим стандартом не охвачены.

Механические свойства большинства демпфирующих материалов зависят от частоты, температуры, а при больших деформациях и от амплитуды деформации. Поскольку настоящий стандарт распространяется только на линейные случаи, зависимость от амплитуды деформации в нем не рассматривается.

Основной задачей настоящего стандарта является улучшение взаимопонимания между специалистами различных отраслей техники, в которых используют понятие вибродемпфирующего материала.

## МАТЕРИАЛЫ ДЕМПФИРУЮЩИЕ

## Графическое представление комплексных модулей упругости

Damping materials.  
Graphical presentation of the complex modulus

Дата введения 2000—07—01

## 1 Область применения

Настоящий стандарт устанавливает форму представления в графическом виде комплексного модуля упругости вязкоупругого вибродемпфирующего материала, обладающего свойствами однородности (на макроскопическом уровне), линейности и термореологической простоты (см. приложение А). Такими комплексными модулями упругости могут быть, например, модуль сдвига, модуль Юнга, модуль объемной упругости или постоянная Ламе. Графическое представление этих физических величин является общепринятым и в большинстве случаев позволяет получить достаточную информацию о свойствах вибродемпфирующих материалов.

В приложении А определены предпочтительные параметры и символы, используемые для представления комплексного модуля упругости.

## 2 Определения и обозначения

В настоящем стандарте используют следующие обозначения:

$\eta_G$  — коэффициент потерь;

$G$  — комплексный модуль упругости;

$G_M$  — абсолютное значение комплексного модуля упругости;

$G_R$  — действительная часть комплексного модуля упругости;

$G_I$  — мнимая часть комплексного модуля упругости;

$\alpha_T(T)$  — функция температурного смещения;

$T$  — температура;

$t$  — время;

$f$  — циклическая частота;

$\omega$  — угловая частота;

$t_R$  — приведенное время;

$f_R$  — приведенная циклическая частота;

$\omega_R$  — приведенная угловая частота.

Пояснение терминов и обозначений, используемых в настоящем стандарте, дано в приложении А.

## 3 Контроль данных

В настоящем стандарте предполагается, что все экспериментальные данные, связанные с комплексным модулем упругости, получены в соответствии с хорошо зарекомендовавшими себя методами (см., например, [1]). Тем не менее, целесообразно осуществлять контроль достоверности данных. Для этого следует, по крайней мере, построить график зависимости  $\lg \eta_G$  от  $\lg G_M$  (см. в качестве примера рисунок 1). Если данные соответствуют термореологически простому материалу, получены в одном масштабе и в них не наблюдается значительного разброса, тогда эти данные на графике зависимости должны лежать на некоторой плавной кривой.

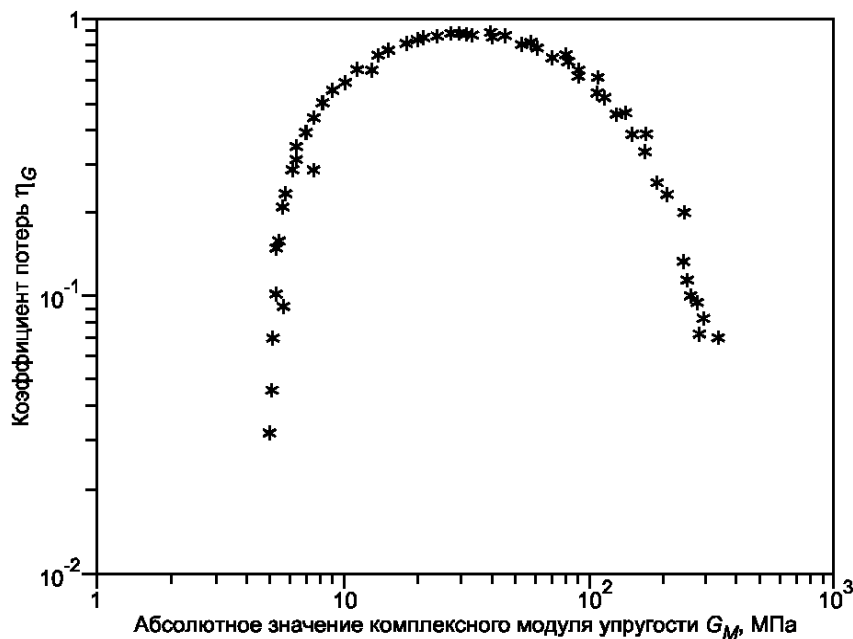


Рисунок 1 — Проверка качества данных

Каждая точка на этой кривой соответствует одному значению приведенной частоты [см. формулу (А.6)]. Однако сам график не предназначен для определения данной величины. Коэффициент потерь в материале и абсолютное значение комплексного модуля упругости связаны между собой параметрической зависимостью через приведенную частоту, которая (так же, как и частота, и температура) не присутствует на графике в явном виде. Ни в какой части разброс в данных на графике не может быть отнесен на счет функции температурного смещения.

График зависимости коэффициента потерь от комплексного модуля упругости, построенный в логарифмическом масштабе, помогает выявить ценную информацию о разбросе в экспериментальных данных. Этот разброс может быть охарактеризован шириной полосы, в которой лежат данные, а также выбросами отдельных точек относительно средней линии полосы. Насколько данный разброс допустим, зависит от конкретных приложений. По данному графику, однако, ничего нельзя узнать о точности измерений температуры и частоты, а также о наличии каких-либо систематических ошибок.

#### 4 Функция температурного смещения

Данные о комплексном модуле упругости, если они получены во всем экспериментальном диапазоне температур и частот, определяют функцию температурного смещения  $\alpha_T(T)$  (при условии, что эта функция единственная).

Рекомендуется, чтобы для всего экспериментального диапазона температур были построены графики трех величин, связанных с функцией температурного смещения, которые наиболее широко используются в практических приложениях (см. в качестве примера рисунок 2):

- самой функции температурного смещения  $\alpha_T(T)$ ;
- ее углового коэффициента  $d(\lg \alpha_T)/dT$ ;
- полной энергии активации  $\Delta H_A$  [2].

Последнюю величину определяют по формуле

$$\Delta H_A = 2,303RT^2 d(\lg \alpha_T)/dT, \quad (1)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная:

$$R = 8,314 \text{ Дж}\cdot\text{К}^{-1}\cdot\text{моль}^{-1}. \quad (2)$$

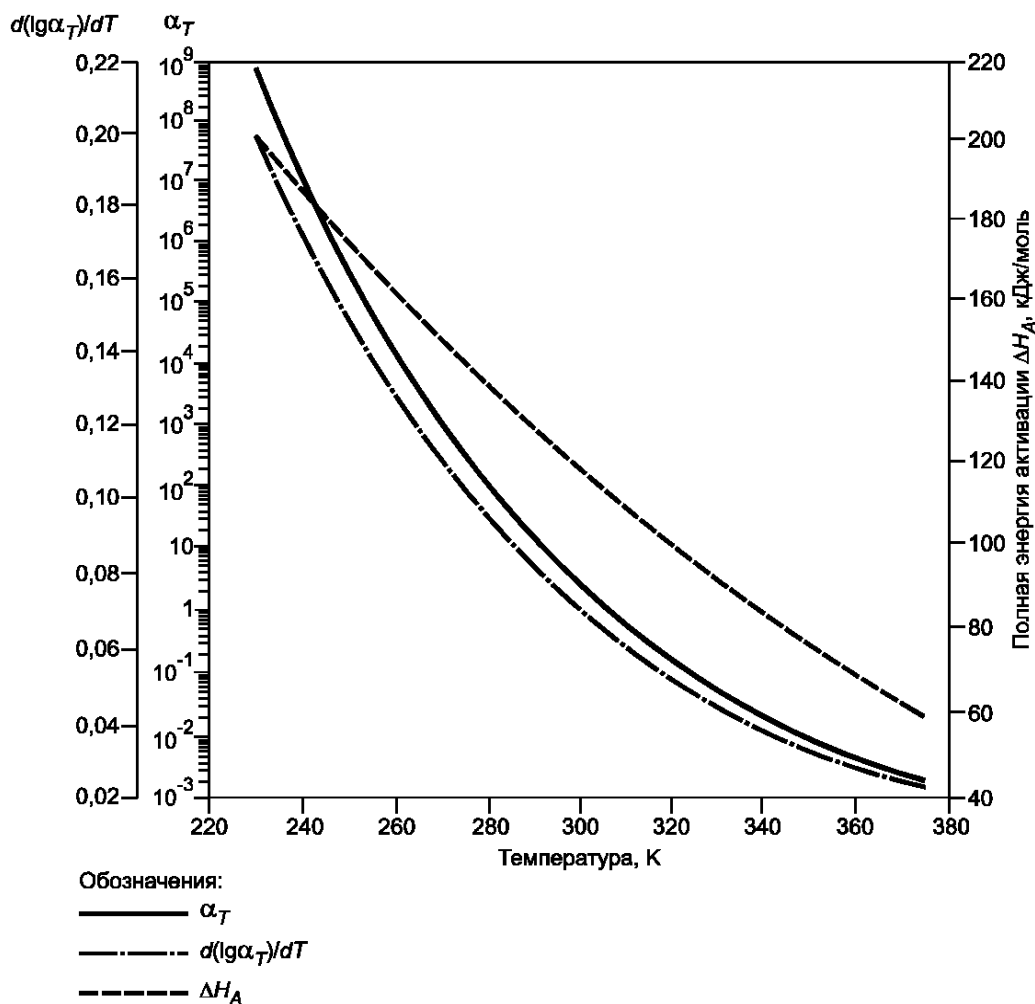


Рисунок 2 — Функция температурного смещения

## 5 Представление данных

### 5.1 График приведенной частоты

Данные для комплексного модуля упругости представлены на рисунке 3. Вдоль вертикальной оси отложены в логарифмическом масштабе действительная  $G_R$  и мнимая  $G_I$  части модуля упругости, МПа, и безразмерный коэффициент потерь  $\eta_G$ . Вдоль горизонтальной оси в логарифмическом масштабе отложена приведенная циклическая частота  $f_R$ , Гц.

Приведенную частоту  $f_{Ri}$  для  $i$ -й экспериментальной точки определяют по формуле

$$f_{Ri} = f_i \alpha_T(T_i), \quad (3)$$

где  $f_i$  — частота, соответствующая  $i$ -й экспериментальной точке;

$T_i$  — температура, соответствующая  $i$ -й экспериментальной точке.

#### 5.1.1 Температурные линии Джоунса

Правая шкала в логарифмическом масштабе на рисунке 3 соответствует циклической частоте  $f$ , Гц. Неравномерно расположенные диагональные прямые линии постоянной температуры, соответствующие формуле (A.5) для переменных в логарифмическом масштабе

$$\lg f_R = \lg f + \lg \alpha_T(T), \quad (4)$$

совместно с горизонтальной осью приведенной частоты и вертикальной осью частоты, составляют номограмму «температура — частота — приведенная частота» [3].

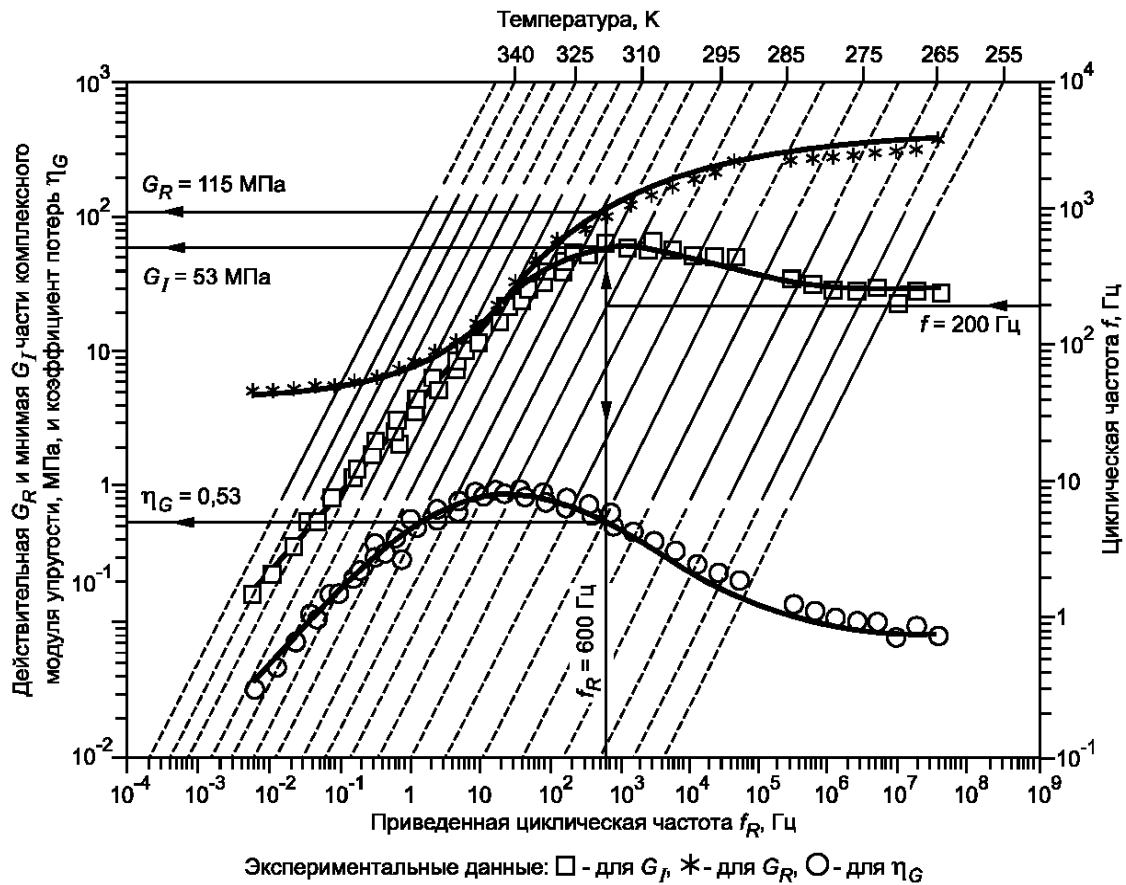


Рисунок 3 — График комплексного модуля упругости для приведенной частоты

Выбирают значения температуры  $T$ , К, отстоящие друг от друга на некоторое принятое значение. Расстояния между прямыми постоянной температуры зависят от функции температурного смещения. Число диагональных линий должно быть таким, чтобы покрывать весь диапазон экспериментальных температур — это позволяет избежать непредусмотренной (и чреватой серьезными ошибками) экстраполяции.

В пределах диапазона частот эксперимента диагональные изотермы показаны сплошными линиями, а вне этого диапазона — пунктирными. Это определяет диапазон изменения приведенной частоты, который изменяется от линии нижней температуры и максимальной частоты в правой части шкалы до линии высшей температуры и минимальной частоты.

#### Пример

Используя данные, представленные на рисунке 3, введем значение частоты 200 Гц на правой вертикальной шкале и от точки, соответствующей 200 Гц, проведем горизонтальную линию до пересечения с диагональной прямой, соответствующей 295 К. Точка пересечения определяет значение приведенной частоты 600 Гц. Вертикаль на этой приведенной частоте пересекает кривые данных в точках, соответствующих значениям 115 МПа для действительной части, 53 МПа для мнимой части и значению коэффициента потерь, определяемому по левой вертикальной шкале, 0,53.

#### 5.1.2 График «перевернутое U»

Те же данные для комплексного модуля упругости  $G$  представлены на рисунке 4, где левая вертикальная логарифмическая шкала соответствует безразмерному коэффициенту потерь  $\eta_G$ , а по горизонтальной логарифмической оси отложена действительная часть комплексного модуля упругости  $G_R$ , МПа.

Рисунок представляет собой номограмму, основанную на формуле (3) [4].



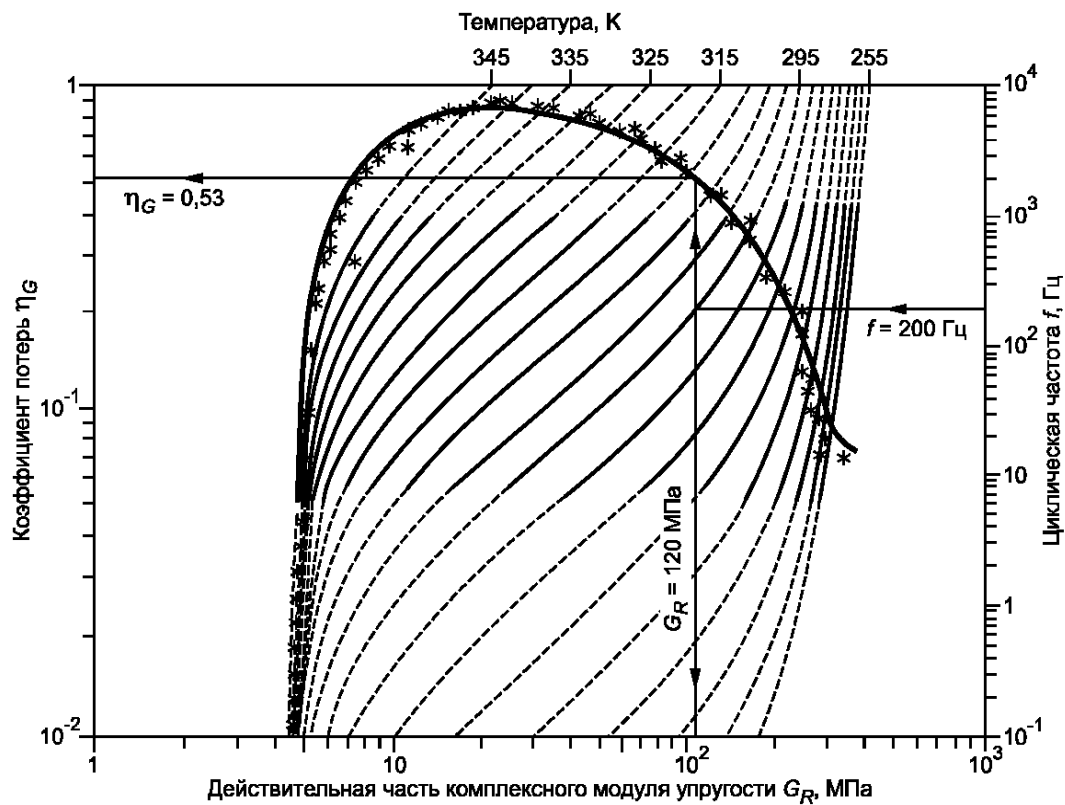


Рисунок 4 — График «перевернутое U» для комплексного модуля упругости

### Пример

Введем на правой шкале значение 200 Гц и от точки, соответствующей 200 Гц, проведем горизонтальную линию до пересечения с кривой, соответствующей 295 К; от точки пересечения проследуем вниз и прочитаем на горизонтальной оси 120 МПа, после чего продолжим вертикаль вверх до пересечения с кривой данных. Проведя горизонталь от точки пересечения до левой вертикальной шкалы, получим значение коэффициента потерь 0,53.

### 5.2 Аналитическое представление данных

В ряде задач определенные удобства обеспечивает аппроксимация полученных данных для функции температурного смещения и комплексного модуля упругости некоторыми аналитическими кривыми. Поэтому, помимо графического, рекомендуется также аналитическое представление данных (например в виде таблиц 1 и 2).

Т а б л и ц а 1 — Пример аналитического представления функции температурного смещения

$$\lg \alpha_T = a(1/T - 1/T_Z) + 2,303(2a/T_Z - b) \lg(T/T_Z) - (b/T_Z - a/T_Z^2 - S_{AZ})(T - T_Z) -$$

$$- d(\lg \alpha_T)/dT = a(1/T - 1/T_Z)^2 + b(1/T - 1/T_Z) + S_{AZ}$$

$$T_Z = A(1) = 290; S_{AZ} = A(4) = 0,069$$

$$T_L = A(2) = 230; S_{AL} = A(5) = 0,2$$

$$T_H = A(3) = 360; S_{AH} = A(6) = 0,04$$

$$C_A = (1/T_L - 1/T_Z)^2$$

$$C_B = 1/T_L - 1/T_Z$$

$$C_C = S_{AL} - S_{AZ}$$

$$D_A = (1/T_H - 1/T_Z)^2$$

$$D_B = 1/T_H - 1/T_Z$$

$$D_C = S_{AH} - S_{AZ}$$

$$D_E = D_B C_A - C_B D_A$$

$$a = (D_B C_C - C_B D_C) / D_E$$

$$b = (C_A D_C - D_A C_C) / D_E$$

Т а б л и ц а 2 — Пример аналитического представления комплексного модуля упругости

$$G = [G_e(jf_R/10^{-\alpha_R} f_{RO})^{\beta_R} + G_g(jf_R/f_{RO})^{\beta_T}] / [1 + (jf_R/10^{-\alpha_F} f_{RO})^{\alpha_B \beta_T} + (jf_R/f_{RO})^{\beta_T - \beta_G}]$$

$$G_e = B(1) = 5,0$$

$$G_g = B(2) = 320$$

$$f_{RO} = B(3) = 410$$

$$\beta_T = B(4) = 0,66$$

$$\beta_G = B(5) = 0,01$$

$$\beta_R = B(6) = 0,005$$

$$\alpha_F = B(7) = 0,52$$

$$\alpha_B = B(8) = 0,58$$

$$\alpha_R = B(9) = 3$$

Если для определения значений параметров зависимостей или при интерпретации данных используют графические изображения (например линеаризованной зависимости между действительной и мнимой частями модуля упругости для определения угла пересечения кривой данных с осью действительной части модуля), они также должны быть включены в представление данных.

При использовании аналитического представления данных следует избегать ненужной экстраполяции.

### Соотношения для комплексного модуля упругости

Основное уравнение для деформируемого линейного, изотермического, изотропного, однородного, терморологически простого [см. формулу (А.7)] вязкоупругого материала в операторной форме имеет вид [5]:

$$P(p_R) \tau(t) = Q(p_R) \gamma(t), \quad (\text{A.1})$$

где  $\tau(t)$  — сдвиговое напряжение;

$\gamma(t)$  — сдвиговая деформация;

$P(p_R)$  и  $Q(p_R)$  — полиномы от  $p_R$ .

Оператор  $p_R$  определяют как

$$p_R = d/dt_R. \quad (\text{A.2})$$

Дифференциал приведенного времени  $dt_R$  определяют как

$$dt_R = dt/\alpha_T(T), \quad (\text{A.3})$$

где  $t$  — время, с;

$\alpha_T(T)$  — безразмерная функция температурного смещения [2], зависящая от температуры  $T$ , К.

Осуществив преобразование Фурье для обеих частей формулы (А.1), можно определить комплексный модуль сдвига  $G$  для изменяющихся по синусоидальному закону напряжения и деформации в виде

$$G(j\omega_R) = \tau^*(j\omega_R)/\gamma^*(j\omega_R) = Q(j\omega_R)/P(j\omega_R), \quad (\text{A.4})$$

где знак \* означает преобразование Фурье некоторой функции времени, например  $\tau^*(j\omega_R)$  — преобразование Фурье для  $\tau(t)$ .

Приведенная угловая частота

$$\omega_R = \omega \alpha_T(T) = 2\pi f_R = 2\pi f \alpha_T(T) \quad (\text{A.5})$$

представляет собой произведение угловой частоты  $\omega$ , рад/с, и безразмерной функции температурного смещения  $\alpha_T(T)$ ;  $f_R$  и  $f$  являются приведенной циклической частотой и циклической частотой, Гц, соответственно.

Комплексный модуль сдвига зависит как от частоты, так и от температуры:

$$G = G(\omega, T). \quad (\text{A.6})$$

В том и только в том случае, когда эта зависимость имеет вид

$$G = G(j\omega_R) = G[j\omega \alpha_T(T)], \quad (\text{A.7})$$

материал называют терморологически простым. Формулы (А.1) — (А.7) справедливы только при выполнении предположения о линейности модели.

Рассмотрим теперь участок вязкоупругого материала под воздействием сдвиговой деформации, изменяющейся по синусоидальному закону [6]:

$$\gamma = \gamma_A \sin \omega t, \quad (\text{A.8})$$

которая отстает по фазе от сдвигового напряжения на угол  $\delta_G$ :

$$\tau = \tau_A \sin(\omega t + \delta_G). \quad (\text{A.9})$$

В комплексном виде эти величины могут быть представлены как

$$\gamma^* = \gamma_A e^{j\omega t}, \quad (\text{A.10})$$

$$\tau^* = \tau_A e^{j(\omega t + \delta_G)}. \quad (\text{A.11})$$

Тогда комплексный модуль сдвига может быть представлен также в виде

$$\begin{aligned} G = \tau^*/\gamma^* &= \tau_A e^{j\delta_G}/\gamma_A = G_M e^{j\delta_G} = G_M \cos \delta_G (1 + j \tan \delta_G) = G_R + jG_I = \\ &= G' + jG'' = G_R (1 + j\eta_G), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

где  $G_M$  — абсолютное значение комплексного модуля сдвига;

$G_R = G'$  — действительная часть комплексного модуля сдвига;

$G_I = G'' = G_R \eta_G$  — мнимая часть комплексного модуля сдвига;

$\eta_G = \tan \delta_G$  — коэффициент потерь в материале при сдвиге.

Сказанное справедливо для одно-, двух- и трехосных деформаций и напряжений [2] и может быть

распространено и на другие параметры, такие как модуль Юнга  $E$ , модуль объемной упругости  $K$ , постоянную Ламе  $\lambda$  и др.

К терморологически простым материалам относят те материалы, для которых комплексный модуль упругости может быть выражен в виде комплексной функции одной независимой переменной, а именно — приведенной частоты, которая отражает зависимость комплексного модуля упругости как от частоты, так и от температуры.

**Примечание** — Иногда действительную часть комплексного модуля упругости и коэффициент потерь в материале рассматривают как независимые функции приведенной частоты. Хотя это и может облегчить получение удовлетворительных практических результатов, с концептуальной точки зрения данное предположение ошибочно.

Оценка комплексного модуля упругости, полученная для заданной температуры и заданной частоты, определяет амплитудное и фазовое соотношение между синусоидальными напряжением и деформацией.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В (справочное)

### Библиография

- [1] Standard method for measuring vibration-damping properties of materials, American Society for Testing and Materials, ASTM E 756—83, 1983
- [2] Ferry, J.D. Viscoelastic properties of polymers, 3rd ed, Wiley, 1980
- [3] Jones, D.I.G. A reduced temperature nomogram for characterization of damping material behavior, Shock and Vibration Bulletin, 1978, Vol. 48, No 2, pp. 13—22
- [4] Jones, D.I.G. and Rao, D.K. A new method for representing damping material properties, ASME Vibration Conference, Boston, MA, Sept. 1987
- [5] Rogers, L. Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations, J. Rheology, 1983, Vol. 27, No 4, pp. 351—372
- [6] Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. — М.: Мир, 1988. — 448 с.

---

УДК 539.32:620.17:006.354

ОКС 17.160

Т34

ОКСТУ 0011

Ключевые слова: модули упругости, измерения, представление данных

---

Редактор *Л.В. Афанасенко*  
Технический редактор *О.Н. Власова*  
Корректор *В.Е. Нестерова*  
Компьютерная верстка *В.И. Грищенко*

Изд. лиц. № 021007 от 10.08.95. Сдано в набор 21.02.2000. Подписано в печать 03.04.2000. Усл. печ. л. 1,40.  
Уч.-изд. л. 0,97. Тираж 211 экз. С 4818. Зак. 290.

---

ИПК Издательство стандартов, 107076, Москва, Колодезный пер., 14.  
Набрано в Издательстве на ПЭВМ  
Филиал ИПК Издательство стандартов — тип. “Московский печатник”, 103062, Москва, Лялин пер., 6.  
Плр № 080102